جامعة البعث

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　　تحليل عقدي /2/　　　　اسم الطالب :

الفصل الثاني للعام الدراسي 2015- 2016

السؤال الأول : (10+15=25درجة)

1"- عيّن النقاط من القرص الدائري $|z| \leq 1$ والتي تبلغ عندها الدالة $f(z) = z^3 + 4z^2 - z$ قيمتها العظمى

2"- أوجد نشر لورانت للدالة $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^3+z^2}$ في النطاق $0 \prec |z| \prec 1$.

السؤال الثاني :(15+10=25درجة)

1"- عيّن نوع النقطة $z = 0$ لكل من الدالتين $f_2(z) = \dfrac{e^{2z}-1}{z^4}$, $f_1(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$ ثمّ احسب

قيمة الراسب لكل من f_1 و f_2 عند $z = 0$.

2"- لتكن لدينا الدالة $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+4}$ مانوع نقطة اللانهاية لهذه الدالة وما هي قيمة الراسب عندها .

السؤال الثالث : (+ 1=20درجة)

أوجد وصنّف النقاط الشاذة للدالتين الآتيتين

$$f_1(z) = \frac{(z-\pi)(e^z-1)}{\sin z} \quad \& \quad f_2(z) = \frac{z-2}{z^3-6z^2+12z-8} e^{\frac{1}{z-1}}$$

السؤال الرابع : (30درجة)

اعتمادا" على نظرية الرواسب أوجد قيمة التكاملين

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=6} \frac{3z^2-8z+4}{z^3-4z^2+4z-1} dz \quad \& \quad I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{2z \cos z}{z^2+\pi^2} dz$$

انتهت الأسئلة

أجمل الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

حل السؤال الأول :

أ- بما أن الدالة كثيرة حدود فهي دالة تحليلية [illegible] مستمرة على المنطقة $|z|\le 1$ [illegible] القيمة العظمى [illegible] الدالة تبلغ قيمتها العظمى على الحدود $|z|=1$ [illegible] $z=e^{i\theta}$ ، $0\le\theta\le 2\pi$

$$|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f(z)} = (e^{2i\theta}+4e^{i\theta}-e^{i\theta})(e^{-2i\theta}+4e^{-i\theta}-e^{-i\theta})$$

$$= 18-(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}) = 18-2\cos 2\theta$$

بما أن $-1\le\cos 2\theta\le 1 \Rightarrow -2\le -2\cos 2\theta\le 2$

$$16\le 18-2\cos 2\theta\le 20$$

أي أن

$$18-2\cos 2\theta = 20 \Rightarrow \cos 2\theta=-1 \Rightarrow 2\theta=\pi+2n\pi$$

$$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi \qquad n=0,\pm 1$$

عندما $n=0$ فإن $\theta=\frac{\pi}{2}$ ومنه $z=i$

عندما $n=1$ فإن $\theta=\frac{3\pi}{2}$ ومنه $z=-i$

[illegible] θ في $[0,2\pi]$ [illegible] الدالة تبلغ [illegible] عند $z=i$ و $z=-i$

ج-

$$f(z)=(2z+1)\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+z}=\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{1+z}$$

$$=\left(\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)(1-z+z^2-z^3+\dots+(-1)^n z^n+\dots) \qquad 0<|z|<1$$

$$=\frac{2}{z}-2+2z-2z^2+\dots+2(-1)^n z^{(n-1)}+\dots+$$

$$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+1-z+z^2+\dots+(-1)^n z^{(n-2)}$$

[illegible]

$$f(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\dots+(-1)^{n+1}z^n \qquad 0<|z|<1$$

أجب السؤال الثاني :

٢- نعلم أن

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \dots$$

ومنه فإن

$$z - \sin z = \frac{1}{3!} z^3 - \frac{1}{5!} z^5 + \frac{1}{7!} z^7 - \dots$$

إذن فإن

$$\frac{z - \sin z}{z^3} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} z^2 + \frac{1}{7!} z^4 - \dots \qquad 0 < |z| < \infty$$

وبما أن القسم الرئيسي معدوم فإن $z=0$ هي نقطة شاذة قابلة للإزالة

وبالتالي فإن

$$\operatorname{Res} f_1(z) = 0$$

نعلم أن

$$e^{2z} = 1 + \frac{1}{1!}(2z) + \frac{1}{2!}(2z)^2 + \frac{1}{3!}(2z)^3 + \dots + \frac{1}{n!}(2z)^n + \dots$$

$$e^{2z} - 1 = 2z + 2z^2 + \frac{8}{6} z^3 + \dots + \frac{1}{n!}(2z)^n + \dots$$

$$\frac{e^{2z} - 1}{z^4} = \frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{8}{6}\frac{1}{z} + \frac{16}{4!} + \frac{32}{5!} z + \dots \qquad 0 < |z| < 1$$

من خلال الاشتراك بين نشر لوران نجد أن $z=0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f_2(z)$

و

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{4}{3}$$

ج- إن النقطة اللانهائية هي نقطة شاذة أساسية للدالة

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

من أجل ذلك نستبدل كل z بـ $\frac{1}{t}$ فنجد أن

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 e^{i/t}}{1+4t^2}$$

وبما أن $\lim_{t \to 0} e^{i/t}$ غير موجودة

إذاً $\lim_{t \to 0} f\left(\frac{1}{t}\right)$ غير موجودة أي أن ∞ نقطة شاذة أساسية وبالتالي فإن

$z=\infty$ نقطة شاذة أساسية لـ ... ومن نظرية الرواسب الشاملة نعلم أن

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4} + \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4} + \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

ومنه فإن

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4} - \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{e^{iz}}{z^2+4}$$

$$= -\left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=2i} - \left.\frac{e^{iz}}{2z}\right|_{z=-2i} = -\frac{e^{-2}}{4i} + \frac{e^{2}}{4i}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}\right) = \frac{1}{2i}(\operatorname{sh} 2)$$

$$I_2 = 3$$

يلي

عن ...

جواب السؤال الثالث

• الشاذات هي جذور المقام $\sin z = 0$ أي $z = n\pi$ [illegible]

[illegible] $n = 0$ [illegible] $z = 0$ صفر [illegible] من المرتبة [illegible] قطب بسيط [illegible]

[illegible] $n \neq 0$ [illegible] $z = n\pi$ [illegible] صفر [illegible] قطب بسيط

أي أن نقاط الشذوذ $z = n\pi$, $n = -1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

هي أقطاب بسيطة للتابع $f_1(z)$

• الشاذات هي جذور المقام في التابع $f_2(z)$

$z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$

$(z-2)^3 = 0$

أي جذر المقام $z = 2$ [illegible] من المرتبة الثالثة $(3-1)$

و[illegible] قطب من المرتبة [illegible] $z = 1$ قطب بسيط

التابع $f_2(z)$

تكون الشاذات هي جذور المقام $z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

$e^{\frac{1}{z-1}}$ [illegible] $\frac{1}{z-1}$ [illegible]

[illegible] $f_2(z)$

جواب السؤال الرابع

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{2z \cos z}{z^2 + \pi^2}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \cos z \frac{2z}{z^2+\pi^2}\, dz =$$

$$= \cos \pi i + \cos(-\pi i) = 2 \cos \pi i = 2 \operatorname{ch} \pi$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{3z^2 - 8z + 4}{z^3 - 4z^2 + 4z - 1}\, dz$$

الحل بالاستفادة من $I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ حيث جذور المقام $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z - 1$

$z = 1 \qquad z = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad z_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$I_2 = 3$

انتهت

مدرس المادة د. [illegible]